



To the Question of the Method of Calculating the Volume of Amphoras

Larisa N. Vodolazhskaya

Southern Federal University (SFU), Rostov-on-Don, Russian Federation;

E-mails: larisavodol@aaatec.org, larisavodol@gmail.com

Abstract

The article describes the methods for calculating the volume of amphoras used by modern archaeologists, and proposes a new fairly accurate method for calculating the volume of antique sharp-pointed amphoras using the example of narrow-necked light-clay amphoras of the 3rd century AD. option D from Tanais. The method described in the article is based on the mathematical model of amphoras as complex bodies of revolution, and uses the geometric approximation method to create it. Using the developed model, formulas were obtained for calculating the volume of the capacitive part of the amphora and its main segments. The creation of an effective mathematical model for narrow-necked light clay amphoras proves the fundamental possibility of creating similar mathematical models for other types of amphoras, including vessels of large sizes, for example, Pythos. The article gives interpretations of Heron's formulas for "pythoid" and "spheroidal pythos" from the point of view of simple bodies of revolution formed by second-order lines (parabola and ellipse), defines the form of "pythoid" as a truncated paraboloid of revolution, and also concludes that it belongs to Archimedes authorship of "Heron's formulas" for calculating the volume of "pythoid" and "spheroid pythos".

Keywords: amphoras, volume, ellipse, parabola, geometric approximation, Heron, Archimedes, Tanais, narrow-necked light-clay Heracleian amphoras, antiquity.

К вопросу о методе расчета объема амфор¹

Л.Н. Водолажская

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация; E-mails:

larisavodol@aaatec.org, larisavodol@gmail.com

Аннотация

В статье описываются методы расчета объема амфор, используемые современными археологами, и предлагается новый достаточно точный метод расчета объема античных остродонных амфор на примере узкогорлых светлоглиняных амфор III в.н.э. варианта D из Танаиса. Описанный в статье метод основан на математической модели амфор, как сложных тел вращения, и использует для ее создания метод геометрической аппроксимации. С помощью разработанной модели были получены формулы для расчета объема емкостной части амфоры и её

¹ Статья публикуется повторно в связи с труднодоступностью сборника, в котором она была опубликована первоначально: Водолажская Л.Н. К вопросу о методе расчета объема амфор // Историко-археологические исследования в Азове и на Нижнем Дону в 2006 г. Выпуск 23. - г. Азов: Издательство Азовского музея-заповедника, 2008.

основных сегментов. Создание эффективной математической модели для узкогорлых светлоглиняных амфор доказывает принципиальную возможность создания сходных математических моделей и для других типов амфор, в том числе, для сосудов больших размеров, например, пифосов. В статье даются интерпретации формул Герона для "пифоида" и "сфероидного пифоса" с точки зрения простых тел вращения, образованных линиями второго порядка (параболой и эллипсом), определяется форма "пифоида", как усеченного параболоида вращения, а также делается вывод о принадлежности Архимеду авторства "формулы Герона" для расчета объема "пифоида" и "сфероидного пифоса".

Ключевые слова: амфоры, объем, эллипс, парабола, геометрическая аппроксимация, Герон, Архимед, Танаис, узкогорлые светлоглиняные гераклейские амфоры, античность.

Исследование торговли античных государств Северного Причерноморья важно для социально-экономической истории древнего мира. Одним из ведущих направлений античного обмена являлась торговля перевозившимися в амфорах товарами. Возможность количественной оценки ее объема тесно связана с характеристиками самих амфор. Сосуды из разных центров производства различаются морфологическими и технологическими признаками. Их анализ позволяет во многих случаях установить происхождение амфор, места производства, хронологию амфор. Самым общим из классообразующих признаков причерноморских амфор является размер сосуда. При этом наиболее показательным является объем амфор (Брашинский, 1984, с. 73; Монахов, 1992, с. 166), от которого напрямую зависят линейные размеры сосудов. Еще Б.Н. Граков, изучая хиосские пухлогорлые амфоры, обратил внимание на их стандартность, в первую очередь, на стандартность их объемов. Он также отметил, что для различных центров производства характерны свои амфорные стандарты (Граков, 1935, с. 178). В работах В. Грейс изучение амфор как стандартной тары античного мира получило дальнейшее развитие. В своей статье "Стандартная керамическая тара античного греческого мира" (Grace, 1949, с. 175) она пришла к следующим важным заключениям: 1) одновременно существовали различные локальные стандарты амфор; 2) в одном центре стандартная амфора была различной в разные периоды; 3) существовали также фракционные клейменные амфоры. Грейс также впервые провела измерение объемов небольшой серии амфор различных центров производства и особо отмечала необходимость измерения больших серий амфор, чего ей сделать не удалось из-за недостатка целых амфор разных типов.

Особое место в изучении античных причерноморских амфор занимают исследования И.Б. Зеест. В процессе изучения остродонных амфор исследовательница неоднократно приводила мерное значение амфор и давала целый ряд обобщенных или конкретных линейных измерений, а в некоторых случаях также емкость в литрах (Зеест, 1960, с. 75, 80, 103).

Когда специалисты задаются целью определить стандартные емкости амфор, они, как правило, производят их фактические измерения жидкостью (водой) или сыпучими телами (песком или зерном). При таком способе измерения за пределами исследования оказывается большое количество сосудов, емкости которых по тем или иным причинам, чаще всего из-за изъянов в их корпусе, не могут быть непосредственно измерены. В таких случаях расчет объема смог бы заменить процедуру измерения.

Для расчета объема амфор исследователи периодически используют формулу Герона Александрийского (I в. н.э.) для объема "пифоида" $V_{Гер}$ (Hultsch, 1864, с. 202):

$$V_{Гер} = \frac{11}{14} \cdot \left(\frac{d_{max} + d_{min}}{2} \right)^2 \cdot H \quad (1)$$

Впервые предложила применить ее для расчетов в 50-х годах XX века М. Лэнг. Она интерпретировала надпись V в. до н.э. из Фасоса, как параметры пифоса (Lang, 1952, с. 18) и попыталась доказать, что в надписи указана высота (H), максимальный (d_{max}) и минимальный (d_{min}) диаметры пифоса, с помощью которых можно вычислить объем сосуда по формуле Герона.

Позднее российский исследователь И.Б. Брашинский, предположил, что формулу Герона для "пифоида" можно использовать в расчетах объемов некоторых типов остродонных амфор (Брашинский, 1976, с. 96). Он предложил для параметров амфор в формуле Герона следующую интерпретацию: d_{max} - максимальный диаметр тулова амфоры, а d_{min} - диаметр устья горла амфоры; H - глубина амфоры (рис. 1а).

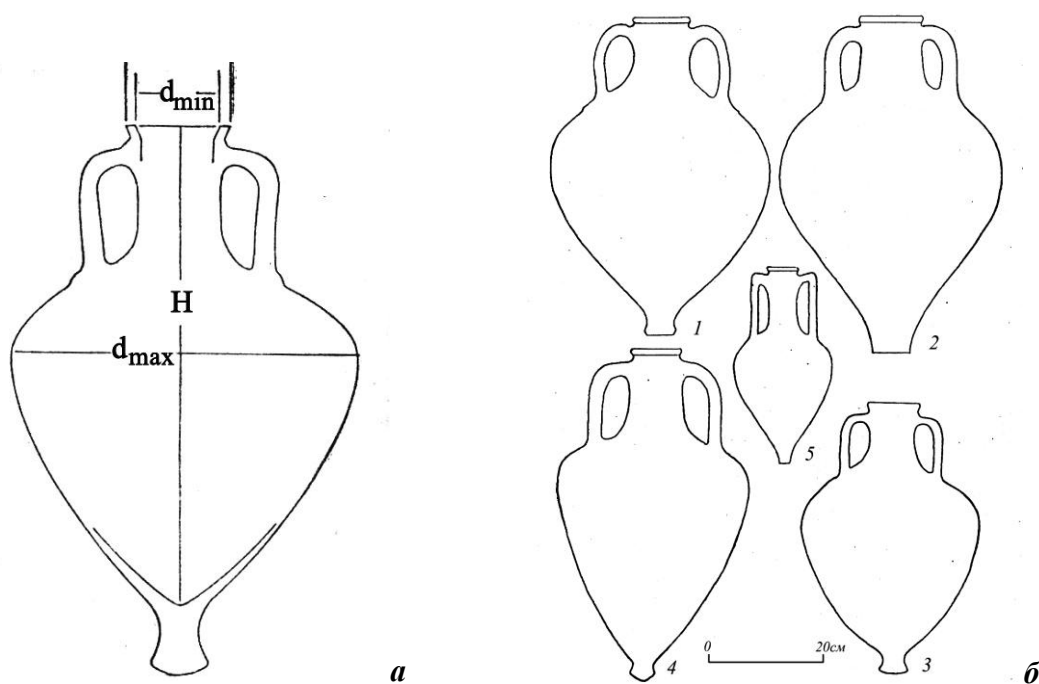


Рисунок 1. *а* - линейные параметры амфоры, входящие в формулу Герона² (Брашинский, 1984, рис. 2); *б* - профили "пифоидных" амфор: 1 – Фасос, 2 – Лесбос, 3 – Менда, 4 – Синопа, 5 – Родос (Брашинский, 1984, табл. VI).

При этом физический смысл самой формулы остался невыясненным, т.к. неясным осталось стереометрическое тело, являвшееся прототипом пифоида. Для амфор, измеренный объем которых совпадал с рассчитанным по формуле Герона в его интерпретации, Брашинский предложил термин – "пифоидные" (Брашинский, 1976, с. 96). К ним он отнес ряд асинхронных амфор из различных центров производства, но сходных по форме с пифосами "определенного типа" (Брашинский, 1984, с. 77). Их он разделил на три "пифоидных" типа: первый тип – фасосские амфоры второй половины V в. до н.э., мендейские амфоры второй половины V в. до н.э. и сероглиняные лесбосские амфоры второй половины VI – начала V в. до н.э., второй тип - амфоры типа Солоха I и ранние

² В приводимых в настоящей статье формулах и рисунках, для удобства восприятия, соответствующие линейные параметры амфор обозначаются одними и теми же символами в независимости от обозначений в статьях, на которые осуществляется ссылка

синопские сосуды IV в. до н.э., третий тип – родосские амфоры III в. до н.э. (рис.1б). В качестве самого яркого примера "пифоидной" амфоры Брашинский привел фасосскую амфору, найденную в Нимфее. Профиль этой амфоры представлен на рисунке 1б. Как и фасосский декрет, амфора датируется V в. до н.э. И.Б. Брашинский приводит линейные параметры нимфейской амфоры: $d_{max}=38$ см, $d_{min}=11$ см, $H=52$ см и измеренный ячменем объем $V=25,7$ л (Брашинский, 1984, с. 78).

При подстановке в формулу Герона линейных параметров получаем объем $V_{Гер} = 24,5$ л. Измеренный объем отличается от рассчитанного по формуле на 1,2 л – достаточно большую величину, - хоть эта разница и составляет всего 5% от измеренного объема. В качестве описания метрологических закономерностей "пифоидных" амфор Брашинский предложил использовать три вида пропорций: $d_{max}:H_6$ (H_6 - высота амфоры), изменяющаяся для "пифоидных" амфор от типа к типу в диапазоне от 0,48 до 0,69; $d_{max}:H$ - в диапазоне от 0,52 до 0,73; $H_1:H$ (H_1 - высота верхней части сосуда от линии максимального диаметра) – в диапазоне от 0,45 до 0,5 (Брашинский, 1984, с. 82). Несмотря на нечеткость критериев, связанных с морфологическими признаками "пифоидных" амфор, термин "пифоидный" стал широко использоваться в современных классификациях античных амфор.

Так российский исследователь С.Ю. Монахов предложил свою модификацию формулы Герона для "пифоида" (Монахов, 1986, с. 106-114). Монахов ввел понятие среднего диаметра амфоры $D_{cp} = \frac{d_{max} + d_{min}}{2}$ и предпринял попытку объяснить физический смысл

формулы Герона, как объема цилиндра (рис. 2а), у которого диаметр основания равен среднему диаметру между внутренним диаметром венчика (устья) d_{min} и максимальным внутренним диаметром тулова d_{max} , а высота цилиндра эквивалентна глубине амфоры H :

$$V = \frac{11}{14} \left(\frac{d_{max} + d_{min}}{2} \right)^2 \cdot H = \frac{\pi}{4} \cdot D_{cp}^2 \cdot H \quad (2)$$

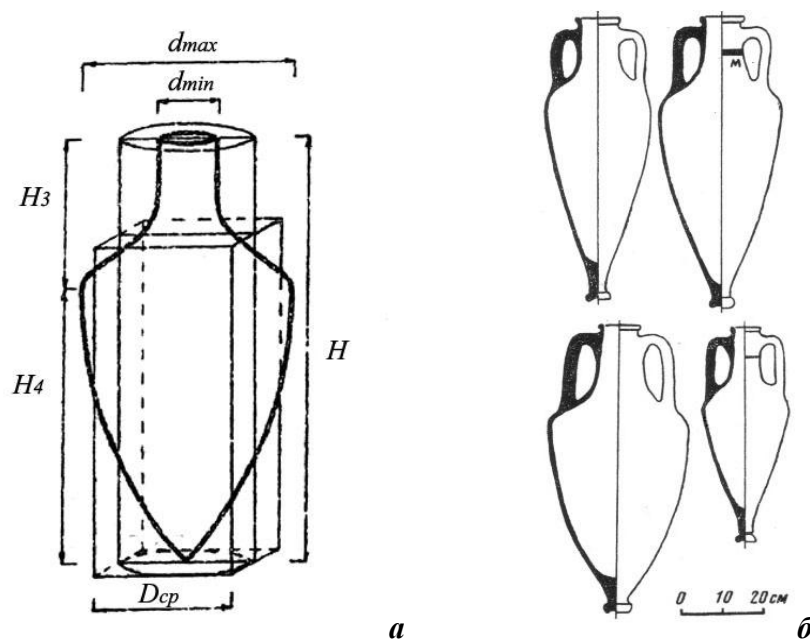


Рисунок 2. а - линейные параметры амфоры, входящие в модифицированную формулу Герона (Монахов, 1986, рис.1); б – античные херсонесские амфоры разных стандартных мер емкости (Монахов, 1980, с. 164).

Монахов пришел к выводу, что формула Герона для "пифоида" подходит не только для вычисления объема описанных Брашинским амфор трех "пифоидных" типов, но и для вычисления объема античных херсонесских амфор (рис.2б) емкостью в 3–6 гемигектов (примерно, 13–26 л) (Монахов, 1986, с. 107). К сожалению, в статье не указана точность расчетов. Для херсонесских амфор емкостью 1-2 гемигекта (4–9 л) (рис. 2б) он предложил использовать "формулу Герона для сфероидного пифоса" (Монахов, 1986, с. 107):

$$V = \frac{11}{21} \left(\frac{d_{\max} + d_{\min}}{2} \right)^2 \cdot H \quad (3)$$

Однако, реконструкция на основе перевода с древнегреческого (Hultsch, 1864, с. 203), формулы Герона³ для сфероидного пифоса выглядит следующим образом:

$$V = \frac{11}{21} \left(\frac{3}{2}d + H \right)^2 \quad (4)$$

Безусловно, сразу бросается в глаза несоответствие размерности получаемой величины (вторая степень) размерности объема (третья степень). Маловероятно, чтобы в I веке н. э. – почти через 400 лет после фундаментальных работ Архимеда по вычислению объемов различных тел, использовали бы явно ошибочную формулу. Скорее всего, эта ошибка возникла в процессе дальнейшей передачи при переписывании рукописи.

С.Ю. Монахов также предложил использовать для херсонесских амфор емкостью в 2–6 гемигектов (9–26 л) эмпирически полученную им формулу объема параллелепипеда (Монахов, 1986, с. 109; Монахов, Слонов, 1992, с. 97), у которого сторона основания равна среднему диаметру амфоры D_{cp} , а высота H_4 – разнице между глубиной сосуда H и высотой горла H_3 (рис.3):

$$V = H_4 \cdot D_{cp}^2 \quad (5)$$

где $H_4 = H - H_3 = \frac{11}{14} \cdot H$ – высота параллелепипеда.

Для херсонесских амфор малой емкости в 3 – 4 хойника (примерно, 3-4 л) С.Ю. Монахов предложил использовать аналогичную формулу, но с высотой параллелепипеда

$H_4 = \frac{11}{21} \cdot H$ (Монахов, 1986, с. 110). К сожалению, для этой формулы также не

указывается точность рассчитанного объема относительно измеренного зерном или водой. Однако, исследователь отмечает закономерность – реальная емкость амфор всегда получается больше стандартной меры (рассчитанной по формуле). Причем, в абсолютных цифрах эта разница примерно равна объему горла (Кац, Монахов, 1977, с. 103). С.Ю.Монахов предполагает, что это связано с преднамеренным созданием воздушной прослойки между содержимым и пробкой. Однако, с точки зрения сохранности перевозимых продуктов, воздушная прослойка такого объема вела бы к их значительному

³ Перевод любезно предоставлен сотрудником кафедры философии религии и религиоведения философского факультета МГУ кандидатом филологических наук О.В. Осиповой: "Диаметр шарообразного пифоса у края равен 5 футам, глубина – 8 футам; (требуется) найти, сколько метретов (амфор) в него поместиться; я делаю так: половина диаметра равна 2 ½ фута, умножаю это на 3, получается 7 ½, прибавляю к этому глубину, всего получается 15 ½, это в квадрате дает 240 ¼, умножить на 11 – получается 2642 ½+1/4 футов, теперь считаю: от этого 1/21 получается 125 ½+1/3+1/84 – столько метретов в него помещается, поэтому кубический фут составляет амфориск".

окислению и порче, поэтому необходимо было, заполнять амфоры до самой пробки, уменьшая до предела воздушную прослойку (Винокуров, 1999, с. 143). Причем, для улучшения сохранности имело значение уменьшение именно общего объема воздуха, а не только площади соприкосновения, от которой зависит лишь скорость окисления.

С.Ю. Монахов также предложил использовать для вычисления объемов амфор формулу:

$$V = K \cdot H_4 \cdot D_{cp}^2 \quad (6)$$

где $H_4 = H - H_3$ – высота параллелепипеда (рис. 2а); K – коэффициент, подбираемый экспериментально для каждой амфорной группы "типо-стандарта" (Монахов, 1992, с. 107). Монахов выделил следующие группы: группу "пифоидных" амфор с $K=1$ и средней точностью расчета 4%, группу "конической" формы с $K=11/14$ и точностью 13%, группу "шаровидных" типов с $K=8/7$ и точностью 7%.

Для расчета объема остродонных амфор другим российским исследователем - Э.Н. Абросимовым - предлагается применять приближенный метод расчета с помощью разделения амфор на усеченные конусы, на которые можно разделить тулово любого сосуда от венца до дна (Абросимов, 1999, с. 123). При этом объем каждого усеченного конуса рассчитывается по формуле (7):

$$V = \pi h / 3 \cdot (R^2 + r^2 + Rr) \quad (7)$$

где h – высота усеченного конуса, R – радиус большего основания, r – радиус меньшего основания. Однако, данные о точности этого метода и о количестве усеченных конусов, на которые рекомендуется разделять амфору, не опубликованы.

Одновременно с предлагаемой формулой (7), Абросимов применяет к гераклейским амфорам V – IV вв. до н.э. типа I и I-A (рис.3) модифицированную формулу С.Ю. Монахова (формула 5) для "пифоидных" амфор. Он считает, что рассматриваемые амфоры являются типичными "пифоидами", т.к. теоретические меры емкости всех фракций этого

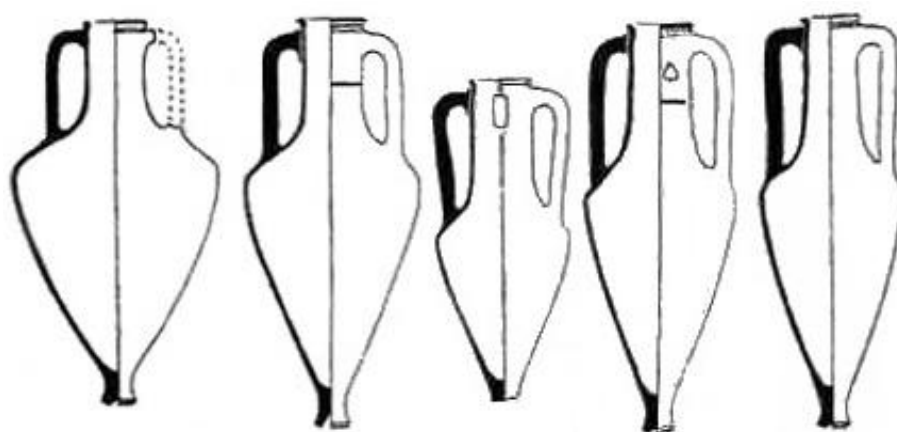


Рисунок 3. Гераклейские амфоры I и I-A (пифоидных) типов (Абросимов, 1999, рис. 1, рис. 2, рис. 3).

типа могут быть рассчитаны по формуле С.Ю. Монахова для "пифоидных" амфор (формула 5). Как видно из рисунка 3, метрические закономерности "пифоидных" амфор из Гераклеи мало соответствуют метрическим закономерностям "пифоидных" амфор, описанным И.Б.Брашинским. С.Ю. Монахов также отмечает несоответствие метрических закономерностей херсонесских амфор закономерностям "пифоидных". И херсонесские, и

рассмотренные гераклейские амфоры не отличаются приземистыми очертаниями, широким туловом и не напоминают по своей форме пифос, как "пифоидные" амфоры Брашинского. Главным критерием "пифоидности" остается лишь формула. Такое положение делает далеко неоднозначным применение термина "пифоидный" в современной морфологической классификации античных амфор.

Главной задачей нашего исследования являлась разработка эффективного метода расчета объема остродонных амфор. В качестве объекта исследования были выбраны узкогорлые светлоглиняные амфоры III в.н.э. варианта D из Танаис (рис.4).

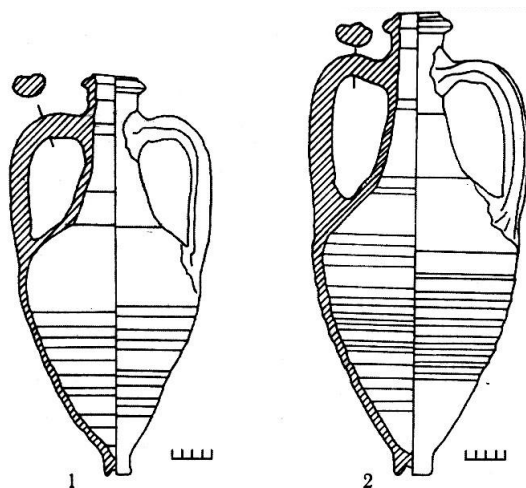


Рисунок 4. Узкогорлые светлоглиняные амфоры III в.н.э. варианта D из Танаиса (Ильяшенко, 2006, с. 191, рис. 2).

Они представляют собой один из наиболее распространенных типов сосудов среди узкогорлых светлоглиняных амфор на территории Северного Причерноморья. Считается, что в античности эти амфоры в основном использовались для транспортировки и хранения вина. В танаисских комплексах, погибших при пожаре в середине III в. н.э., было обнаружено большое количество таких сосудов. Именно большое количество целых экземпляров и их стандартность позволили провести статистически достоверное исследование.

Для решения поставленной задачи использовался метод геометрической аппроксимации (от лат. *approximatio* – приближаюсь) математическими линиями второго порядка внутреннего контура профиля амфоры. С помощью этого метода была разработана математическая модель светлоглиняной узкогорлой амфоры, как сложного тела вращения, состоящего из трех простых тел вращения, с образующими линиями – линиями второго порядка (коническими сечениями).

Отвечающая за объём, ёмкостная часть типичной узкогорлой светлоглиняной амфоры варианта D структурно состоит из трех сегментов: тулова, плеч и горла. В рамках предложенной математической модели границам тел вращения были поставлены в соответствие границы конструктивных сегментов амфоры: тулова, плеч и горла. Для каждого из структурных сегментов в качестве образующих линий были проверены все три типа линий: парабола, эллипс и гипербола. Оказалось, что профилю овоидного тулова узкогорлых светлоглиняных амфор варианта D наиболее точно соответствует парабола, т.е. парабола аппроксимирует (приблизненно описывает) профиль тулова, а самому тулову соответствует параболоид вращения. Однако, внутри у тулова узкогорлых светлоглиняных амфор, как правило, существует небольшое плоское дно. Поэтому в

соответствие тулову был поставлен не просто параболоид вращения, а усеченный параболоид (рис.5в) (формула 8).

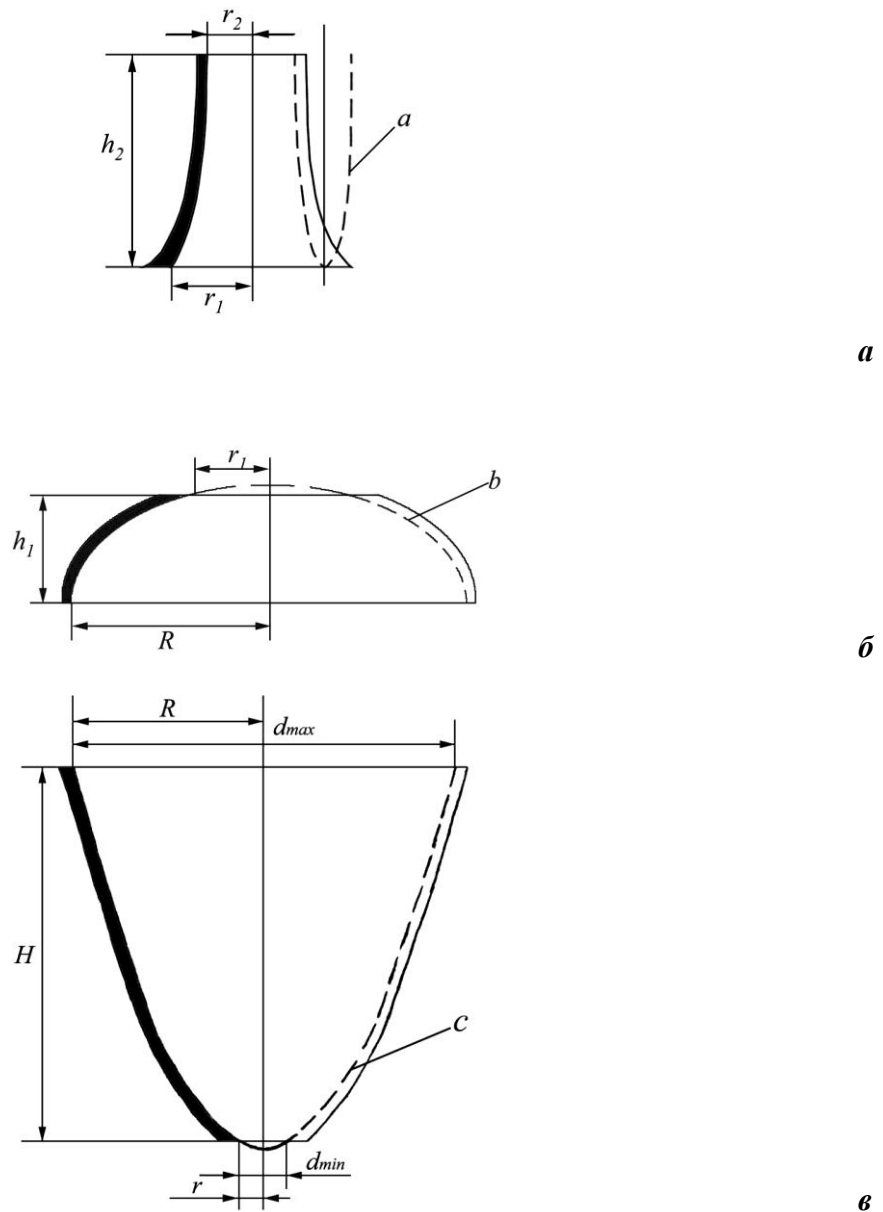


Рисунок 5. *а* - аппроксимация параболой внутреннего профиля горла; *а*- параболоа; *б* - аппроксимация эллипсом внутреннего профиля плеч; *б* – эллипс; *в* - аппроксимация параболой внутреннего профиля тулова; *с* – параболоа.

Профилю плеч узкогорлых светлоглиняных амфор варианта D наиболее точно соответствует эллипс, а самим плечам – половина усеченного эллипсоида вращения (рис.5б) (формула 9).

Профиль горла наиболее точно аппроксимирует параболоа, однако, соответствующее тело вращения не является классическим параболоидом, т.к. ось вращения тела не совпадает с осью симметрии параболоа, а находится с внешней стороны (рис.5а). Уравнение параболоа, аппроксимирующей сегмент горловины, имеет вид (10).

$$y = \frac{H}{(R^2 - r^2)} \cdot (x^2 - r^2) \tag{8}$$

$$y = H + h_1 \cdot \sqrt{\frac{R^2 - x^2}{R^2 - r_1^2}} \quad (9)$$

$$y = H + h_1 + h_2 \cdot \left(\frac{x - r_1}{r_2 - r_1} \right)^2 \quad (10)$$

R - внутренний радиус самой широкой части тулова

r - внутренний радиус дна тулова

r_1 - внутренний радиус нижней части горловины

r_2 - внутренний радиус верхней части горловины

H - внутренняя высота (глубина) тулова

h_1 - высота плеч

h_2 - высота горловины

Аппроксимация линиями второго порядка полного внутреннего профиля типичной узкогорлой светлоглиняной амфоры варианта D также представлена на рисунке 6.

Имея стереометрическое соответствие для каждого сегмента амфоры и уравнения аппроксимирующих линий для них, можно получить формулы вычисления соответствующих объемов. Таким образом, объем тулова V_1 вычисляется по формуле объема усеченного параболоида (11), объем плеч V_2 вычисляется по формуле объема усеченного эллипсоида (12), а объем горловины V_3 вычисляется по формуле (13).

$$V_1 = \frac{1}{2} \pi (R^2 + r^2) H \quad (11)$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi (2R^2 + r_1^2) h_1 \quad (12)$$

$$V_3 = \pi h_2 \left(r_1^2 + \frac{1}{2} (r_1 - r_2)^2 - \frac{4}{3} r_1 (r_1 - r_2) \right) \quad (13)$$

Объем всей амфоры представляет собой сумму рассчитанных объемов (13).

$$V_{cal_i} = V_{1i} + V_{2i} + V_{3i} \quad (14)$$

V_{cal_i} - суммарный рассчитанный объем (calculated volume) тулова i -й амфоры;

V_{1i} - вычисленный объем тулова i -й амфоры;

V_{2i} - вычисленный объем плеч i -й амфоры;

V_{3i} - вычисленный объем горловины i -й амфоры;

Метод расчета объема на основе разработанной математической модели узкогорлых светлоглиняных амфор III в.н.э. варианта D был апробирован на амфорах из коллекции ГУК РО Археологического музея-заповедника "Танаис". Исследуемая выборка состояла из 60 амфор хорошей сохранности с неповрежденной емкостной частью. В выборке были представлены амфоры в диапазоне от 2,6 л до 4,2 л. Для вычисления внутренних параметров учитывалась типичная толщина стенок узкогорлых светлоглиняных амфор. Средняя толщина стенок тулова и плеч была принята равной 0,7 см, стенок нижней части горловины – 1,5 см, стенок верхней части горловины – 0,8 см, внутренний радиус дна тулова – 0,9 см. Верхняя граница емкостной части горловины определялась уровнем верхнего прилепа ручек к горлу амфоры (Ильяшенко, 2006, с. 189). Рассчитанные объемы

сравнивались с измеренными водой или зерном объемами исследуемых амфор. Частично опубликованные результаты измерений водой были предоставлены главным хранителем Археологического музея-заповедника "Танаис" С.М. Ильяшенко (Ильяшенко, 2006, с.193-199). Максимальное отклонение рассчитанных объемов от объемов, измеренных водой или зерном, (15) не превысило 6%. Среднее отклонение рассчитанных объемов от измеренных (16) не превысило 3%.

$$k_i = \left| \frac{V_{m_i} - V_{cal_i}}{V_{m_i}} \right| \cdot 100\% \quad (15)$$

$$k_{av} = \frac{\sum_{i=1}^n k_i}{n} \quad (16)$$

V_{m_i} - общий измеренный объем (measured volume)

n – количество исследуемых амфор

k_i – отклонение рассчитанного объема от измеренного водой или зерном для i -ой амфоры

k_{av} – среднее отклонение (average difference) рассчитанных объемов от измеренных

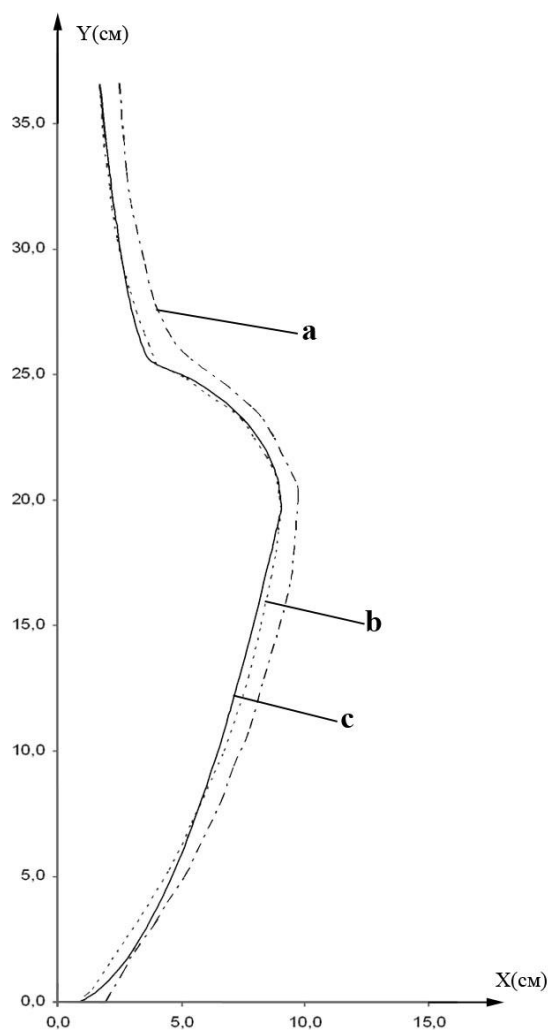


Рисунок 6. Амфора Т-89-ХІV, ЕЮ шт. 12 , № 293; **a** – внешний профиль, **b** – внутренний профиль, **c** – линии второго порядка, аппроксимирующие внутренний профиль.

Полученный результат свидетельствует о высокой степени соответствия предложенной математической модели реальным узкогорлым светлоглиняным амфорами варианта D из Танаиса. Это, в свою очередь, позволяет, считать метод геометрической аппроксимации достаточно перспективным не только для расчета объема амфор, но и для их реконструкции, наряду с другими типами сосудов (Водолажская, 2004, с. 512).

Из полученных результатов, с точки зрения истории математики, вытекает очень интересное следствие. Формулу для вычисления объема тулова, являющейся, по сути, формулой объема усеченного параболоида $V_1 = \frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2)H$, можно выразить не только через радиусы, но и через диаметры, тогда получим:

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{d_{\max}^2 + d_{\min}^2}{2} \right) \cdot H = \frac{11}{14} \cdot \left(\frac{d_{\max}^2 + d_{\min}^2}{2} \right) \cdot H \quad (17)$$

d_{\max} - внутренний диаметр самой широкой части тулова

d_{\min} - внутренний диаметр дна тулова

H - внутренняя высота (глубина) тулова

Эта формула очень похожа на формулу Герона для пифоида $V_{\text{Гер}} = \frac{11}{14} \cdot \left(\frac{d_{\max} + d_{\min}}{2} \right)^2 \cdot H$.

Вполне возможно, что "пифоид", с точки зрения стереометрии, представляет собой не что иное, как усеченный параболоид вращения. Пифос по определению - это большой глиняный сосуд, основная часть которого имеет овоидную форму. Т.к. Герон вводит новый термин - "пифоид" (Hultsch, 1864, с. 202), а не использует широко известный - "пифос", обозначающий конкретный тип сосуда, можно предположить, что речь идет о вычислении объема именно овоидной части тулова сосуда, в виде усеченного параболоида, а не всего сосуда целиком. Возможно, аналогично формуле для "сфероидного" пифоса, формула для "пифоида" попала к Герону в искаженном виде, либо была искажена в процессе последующей передачи.

Герон Александрийский жил в I в н.э. Его труды во многом напоминали собрание формул с задачами на их применение. Он не приводил вывод формул. Некоторые числовые примеры Герона встречались еще в клинописных текстах. Его наиболее известная формула для определения площади треугольника по трем сторонам восходит к крупнейшему ученому античности Архимеду (III в до н.э.). Некоторые формулы Герона, главным образом, для измерения объемов, также были заимствованы у Архимеда (Ван Дер Варден, 1959, с. 314), центральной темой математических работ которого, как раз и являлись задачи на нахождение объемов и площадей различных поверхностей. Архимед вычислил объем шара и сферического сегмента, а также объемы эллипсоида и параболоида вращения (Архимед, 1962, с. 168, 170, 508). Все формулы были получены им со строгим математическим обоснованием и совпадают с современными. Таким образом, вполне возможно, что формула объема "пифоида", как усеченного параболоида, была выведена еще Архимедом, а затем заимствована у него Героном. Однако соответствующие рукописи Архимеда пока не обнаружены, хотя в его наиболее поздней работе - "О плавающих телах" - рассматриваются именно сегменты параболоида вращения. В любом случае, формула объема усеченного параболоида почти совпадает с формулой для объема "пифоида". И если это, действительно, одна и та же формула, то физический смысл формулы Герона для "пифоида", в целом, и смысл каждого из ее

множителей, становится совершенно ясным. А термин "пифоидная" амфора имеет смысл применять к амфорам с овоидным туловом, т.е. с туловом в виде усеченного параболоида вращения.

В своих трудах: "Метод" и "О коноидах и сфероидах", Архимед также вывел и доказал формулу объема эллипсоида. В своих работах Архимед называл параболоид вращения – коноидом, а эллипсоид вращения – сфероидом. Термины: парабола, параболоид, эллипс и эллипсоид, были введены позже Аполлоном Пергским (II - III вв. до н.э.) (Розенфельд, 2004, с. 175). Формула объема эллипсоида вращения в современных обозначениях имеет вид (Выгодский, 1976, с. 490):

$$V_{эл} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} d^2 \cdot h = \frac{\pi}{6} d^2 \cdot H \quad (18)$$

где r – меньшая полуось эллипсоида, h – большая полуось эллипсоида, d – меньшая ось эллипсоида, H – большая ось эллипсоида.

Если предположить, что героновский "сфероидный" пифос представляет собой не целый эллипсоид, а $3/4$ от его объема, то тогда формула объема будет иметь следующий вид:

$$V_{сф_пиф} = \frac{3}{4} \cdot V_{эл} = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{3}{2} d^2 \cdot h = \frac{11}{21} \left(\frac{3}{2} d^2 \cdot h \right) \quad (19)$$

Мы видим, что полученная формула очень похожа на реконструкцию, основанную на переводе с древнегреческого: $V = \frac{11}{21} \left(\frac{3}{2} d + H \right)^2$. Поэтому вполне возможно, что это одна и та же формула, но случайно, либо преднамеренно, искаженная в процессе передачи. Если это так, то мы получаем однозначную интерпретацию и физического смысла, и самой формулы объема героновского "сфероидного" пифоса и ее параметров.

Таким образом, в рамках настоящего исследования разработан достаточно точный метод расчета объема античных остроногих амфор на примере узкогорлых светлоглиняных амфор III в.н.э. варианта D из Танаиса и даны интерпретации формул Герона для "пифоида" и "сфероидного пифоса" с точки зрения простых тел вращения, образованных линиями второго порядка (параболой и эллипсом). Описанный в статье метод основан на математической модели амфор, как сложных тел вращения, и использует для ее создания метод геометрической аппроксимации. С помощью разработанной модели были получены формулы для расчета объема емкостной части амфоры и её основных сегментов. Создание эффективной математической модели для узкогорлых светлоглиняных амфор доказывает принципиальную возможность создания сходных математических моделей и для других типов амфор, в том числе, для сосудов больших размеров, например, пифосов. Однако, надо заметить, что возможность создания эффективной и, одновременно, простой математической модели – это особенность именно светлоглиняных узкогорлых амфор III в. н. э. варианта D из Танаиса, а не особенность предложенного метода. Использованный для создания математической модели способ разбивки амфоры на отдельные тела вращения в соответствии с границами конструктивных сегментов не является универсальным. Каждый тип амфор требует индивидуального рассмотрения с точки зрения математического моделирования их формы и требует индивидуального вывода и апробации формул для расчета их объема.

Литература

- Абросимов Э.Н. Стандарты емкости амфор Гераклеи Понтийской в IV в. до н.э. // Антический мир и археология. - Саратов, 1999 - Вып. 10.
- Архимед. Сочинения. - М.: Гос. изд. физ.-мат. лит., 1962.
- Брашинский И.Б. Методика изучения стандартов древнегреческой керамической тары // Советская археология, 1976. - №3.
- Брашинский И.Б. Методы исследования античной торговли (на примере Северного Причерноморья). - Л.: Наука, 1984.
- Ван Дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. - М.: Наука. Гос. изд. физ.-мат. лит., 1959.
- Винокуров Н.И. Виноделие античного Боспора. – М., 1999.
- Водолажская Л.Н. О возможности применения геометрической аппроксимации для реконструкции сосудов на примере керамики Константиновского поселения. // Историко-археологические исследования в г. Азове и на Нижнем Дону. - Азов, 2004. - Вып.20.
- Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976.
- Граков Б.И. Тара и хранение сельскохозяйственных продуктов в классической Греции VI – IV веков до н.э. // Известия Государственной Академии материальной культуры, 1935. - вып.108.
- Зеест И.Б. Керамическая тара Боспора. // Материалы и исследования по археологии СССР. – 83, 1960.
- Ильяшенко С.М. Цифровые *dirinti* на узкогорлых светлоглиняных амфорах III в. н.э. из Танаиса. // Историко-археологические исследования в г. Азове и на Нижнем Дону. - Азов, 2006. - Вып.22.
- Монахов С.Ю. Динамика форм и стандартов синопских амфор // Греческие амфоры. – Саратов, 1992.
- Кац В.И., Монахов С.Ю. Амфоры эллинистического Херсонеса с поселения Панское-1 в Северо-Западном Крыму // Антический мир и археология. - Саратов, 1977. - Вып.3.
- Монахов С.Ю. Еще раз о стандартах емкости амфор эллинистического Херсонеса // Вестник древней истории, 1980. - №4.
- Монахов С.Ю. О некоторых особенностях расчета стандартных мер емкости остродонных амфор // Антический мир и археология. - Саратов, 1986. - Вып.6.
- Монахов С.Ю., Слонов В.Н. К реконструкции античной методики расчета и моделирования древнегреческих амфор // Вестник древней истории, 1992. - №2.
- Розенфельд Б.А. Аполлоний Пергский. – М.: Изд. Моск. Центра непрерыв. матем. образования, 2004.
- Grace V.R., 1949. Standard pottery containers of the ancient Greek World. *Hesperia*. Suppl. VIII. p. 175 sq.
- Hultsch F. *Metrologicorum scriptorum reliquiae*. Lipsiae, 1864, Bd I, S. 202, N 19.
- Lang M.A. New Inscription from Thasos: Specifications for a Measure. – *BCH*, 1952, vol.76, p.18 sq